平均曲率ベクトル平行曲面 その過去・現在、そして未来 第一部

劒持 勝衛

東北大学

東京　秋葉原, 2 October　2016

Part 1: 一般論

本講演では正定値の場合だけを扱う
M : n 次元リーマン多様体 $(n \geq 2)$
$\bar{M}$: $\bar{n}$ 次元リーマン多様体 $(\bar{n} \geq 3)$,
$x : M \to \bar{M}$: 等長的はめ込み
Gauss and Weingarten :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X V &= -A_V X + \nabla^{\perp}_X V, \quad (X, Y \in T(M), V \in N(M)) \end{aligned}$$

$h, A, \nabla^{\perp}$: はめ込み x の第二基本形式、型作用素、法接続
$h(X, Y) \in N(M)$ s.t. $\langle h(X, Y), V \rangle = \langle A_V X, Y \rangle$,

h はベクトル束 $Hom(T(M), N(M))$ に値をもつ M 上の 1-形式 :

$$h(X) : Y \to h(X, Y) \quad (X, Y \in T(M))$$

平均曲率ベクトル H

$H := \frac{trace\ \ h}{\dim M}$

定義　x が平均曲率ベクトル平行はめ込み (pmc immersion)
$\Leftrightarrow \nabla^{\perp} H = 0$

例
$\bar{n} = n + 1 \quad \Rightarrow \quad \{cmc\} \subset \{pmc\}$

{ minimal submanifolds in S^n} $\subset$ { pmc in R^{n+1}}

平均曲率ベクトル H

$H \;:=\; \frac{trace\ \ h}{\dim M}$

定義　x が平均曲率ベクトル平行はめ込み (pmc immersion)
$\Leftrightarrow \nabla^{\perp} H = 0$

例
$\bar{n} = n + 1 \quad \Rightarrow \quad \{cmc\} \subset \{pmc\}$

$\{$ minimal submanifolds in $S^n\} \subset \{$ pmc in $R^{n+1}\}$

本講演では、主として、非自明な部分多様体の存在について議論する。(「自明」な部分多様体とは、定曲率空間内の全測地的、全臍的部分多様体)

平均曲率ベクトル H

$H \ := \ \frac{trace \ \ h}{\dim M}$

定義　x が平均曲率ベクトル平行はめ込み (pmc immersion)
$\Leftrightarrow \nabla^{\perp} H = 0$

例
$\bar{n} = n + 1 \quad \Rightarrow \quad \{cmc\} \subset \{pmc\}$

$\{$ minimal submanifolds in $S^n\} \subset \{$ pmc in $R^{n+1}\}$

本講演では、主として、非自明な部分多様体の存在について議論する。（「自明」な部分多様体とは、定曲率空間内の全測地的、全臍的部分多様体）

pmc はめ込みに条件をつけて部分多様体を決定する、一意性定理、特徴付け定理, が多く知られているが、ここではそのほとんどを紹介しない。

"It was S.S.Chern who first suggested in the mid 1960s that the notion of parallel mean curvature vector was the natural extension of constant mean curvature for hypersurfaces."

(B.Y. Chen, "Submanifolds with parallel mean curvature vector in Riemannian and indefinite space forms", arXiv:1307.0430, p.2)

"It was S.S.Chern who first suggested in the mid 1960s that the notion of parallel mean curvature vector was the natural extension of constant mean curvature for hypersurfaces."

(B.Y. Chen, "Submanifolds with parallel mean curvature vector in Riemannian and indefinite space forms", arXiv:1307.0430, p.2)

以後　余次元 ≥ 2, $H \neq 0$　と仮定

調和写像

$f : M \to \bar{M}$ 滑らかな写像に対し、f のエネルギー汎関数を $E(f)$ とする

$E(f)$ の第一変分がゼロとなる写像を調和的という。 f の テンション場を $\tau(g)$ とするとき、

$$E'(f) = 0 \Leftrightarrow \tau(f) = 0.$$

調和写像

$f: M \to \bar{M}$ 滑らかな写像に対し、f のエネルギー汎関数を $E(f)$ とする
$E(f)$ の第一変分がゼロとなる写像を調和的という。f の テンション場を $\tau(g)$ とするとき、

$$E'(f) = 0 \Leftrightarrow \tau(f) = 0.$$

$G(n, \bar{n} - n)$: $\bar{n}$ 次元ユークリッド空間内 n 次元ベクトル空間のつくるグラスマン多様体

定理 (Ruh-Vilms, 1970)

$x : M \to R^{\bar{n}}$ *pmc*

$\Longleftrightarrow$

ガウス写像 $g : M \to G(n, \bar{n} - n)$ が調和的

Ruh-Vilms は次を示した。 g のテンション場を $\tau(g)$ とするとき、

$$\tau(g) = \nabla^{\perp} H$$

ベクトル束値調和形式

松島与三　Osaka J. M. 1971 :

E : リーマン多様体 M 上のリーマンベクトル束

$\square$: E に値をもつ微分形式に作用するラプラス作用素

ベクトル束値調和形式

松島与三　　Osaka J. M. 1971 :

E :　リーマン多様体 M 上のリーマンベクトル束

$\square$: E に値をもつ微分形式に作用するラプラス作用素

第二基本形式 h を $Hom(T(M), N(M))$-値 1-形式と見たとき、

定理 (Matsushima, 1971)

$\bar{M}(\bar{c})$: 定曲率 $\bar{c}$ の空間形. このとき、

$x : M \to \bar{M}(\bar{c})$: pmc $\iff$ h : 調和 1-形式

OJM 1971

リーマンベクトル束 E の共変微分を D_X $(X \in T(M))$ とするとき、

$$X\langle\phi,\psi\rangle = \langle D_X\phi,\psi\rangle + \langle\phi, D_X\psi\rangle \quad (\phi,\psi \text{ sections of } E)$$

$C^p(E)$: M 上 E-値 p 次微分形式のなす実ベクトル空間
$\theta \in C^p(E)$ に対し、

$$\partial : C^p(E) \to C^{p+1}(E),\ (p = 0, 1, \ldots)$$

$$(\partial\theta)(X_1, \ldots, X_{p+1}) := \Sigma_i(-1)^{i+1} D_{X_i}(\theta(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1})) + \Sigma_{i<j}(-1)^{i+j}\theta([X_i, X_j], X_i, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1})$$

θ の X 方向の共変微分 $D_X\theta(\in C^p(E))$ を

$$(D_X\theta)(X_1, \ldots, X_p) := D_X(\theta(X_1, \ldots, X_p)) - \Sigma_i\theta(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_p)$$

OJM 1971

等式

$$(\partial\theta)(X, Y) = (D_X\theta)(Y) - (D_Y\theta)(X) \quad (\theta \in C^1(E)),$$

θ の共変微分 $D\theta$ は E-値 (p+1)-テンソル場で

$$(D\theta)(X_1, ..., X_p, X) = (D_X\theta)(X_1, ..., X_p).$$

定義　$\partial^* : C^p(E) \to C^{p-1}(E)$ $(p > 0)$

$\{e_1, ..., e_n\}$: $T_x(M)$ の正規直交基底（x の近傍でベクトル場に拡張）として

$$(\partial^*\eta)_x(u_1, ..., u_{p-1}) := -\Sigma_k(D_{e_k}\eta)_x(e_k, u_1, ..., u_{p-1}) \quad (\eta \in C^p(E))$$

$\partial^*\eta : x \to (\partial^*\eta)_x$ は M 上の E-値 $(p-1)$-次微分形式

OJM 1971

E-値微分形式のラプラシアンの定義

$$\Box := \partial\partial^* + \partial^*\partial$$

E-値 p-形式 θ, η に対しスカラー積：

$$\langle \theta, \eta \rangle := \Sigma_{i_1,\dots,i_p} \langle \theta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}), \eta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \rangle$$

事実　　θ: E-値 1-形式. そのとき、

$$\langle \Box\theta, \theta \rangle = \frac{1}{2}\Delta\langle \theta, \theta \rangle + \langle D\theta, D\theta \rangle + A,$$

ここで, A は x から定まるスカラー場.

M: コンパクト、向きつけられているとする. 内積 $(\ ,\ )$ を次で定義:

$$(\theta, \eta) = \int_M \langle \theta, \eta \rangle dM.$$

事実 θ: E-値 1-形式 s.t. $\Box\theta = 0$. そのとき、

$$(D\theta, D\theta) + \int_M A dM = 0.$$

もし M 上 $A \geq 0$ なら、$A \equiv 0, \quad D\theta = 0$.

事実 $(\Box\theta, \theta) = (\partial\theta, \partial\theta) + (\partial^*\theta, \partial^*\theta)$.

よって、もし M: コンパクトなら

$$\Box\theta = 0 \Leftrightarrow \partial\theta = 0, \partial^*\theta = 0.$$

$E := Hom(T(M), N(M))$
h: はめ込み $x : M \to \bar{M}$ の第二基本形式
任意の $X \in T(M)$ に対し、対応　$Y \to h(X, Y)$ は E の元、よって h は M 上の E 値 1 次微分形式と見なされる。

定理 (Matsushima, OJM (1971))

$\bar{M}$: 空間形　$\Rightarrow$　$\partial h = 0$.

$\bar{M}$ 空間形, 更に x: *pmc*　$\Rightarrow$　$\partial^* h = 0$.

逆も成立する

$E := Hom(T(M), N(M))$
h: はめ込み $x : M \to \bar{M}$ の第二基本形式
任意の $X \in T(M)$ に対し、対応　$Y \to h(X, Y)$ は E の元、よって
h は M 上の E 値 1 次微分形式と見なされる。

定理 (Matsushima, OJM (1971))

$\bar{M}$: 空間形 $\quad \Rightarrow \quad \partial h = 0.$

$\bar{M}$ 空間形, 更に x: $pmc \quad \Rightarrow \quad \partial^* h = 0.$

逆も成立する

注意　　$\partial h = 0$ は Codazzi の方程式

定理 (Matsushima,1971)

$\bar{M}$: 定曲率リーマン空間　$x : M \to \bar{M}$ 等長的はめ込み
そのとき、第二基本形式 h は $\Box h = 0$ を満たす. 逆に、もし M : コンパクト、向き付け可能で $\Box h = 0$ を満たすならば、x は pmc.

Y. Matsushima, Vector bundle valued harmonic forms and immersions of Riemannian manifolds, Osaka J.M. 8(1971), 1-13
の序文の最後に

"In a future paper we shall discuss the case where M is a Kaehler manifold."

松島与三 (1921-1983) 「多様体入門」、裳華房　初版　昭和 40(1965) 年 9 月

外的球面

K. Nomizu (野水克己), “Generalized central spheres and the notion of spheres in Riemannian geometry”, Tohoku Math. J. 1973

n 次元球面 $S^n \subset E^{n+p}$ の拡張として

定義
$M \subset \bar{M}$: 外的球面 (extrinsic sphere)

$\Leftrightarrow$

$M \subset \bar{M}$, $(H \neq 0)$: 全臍的で平均曲率ベクトル平行

外的球面の特徴付け (Nomizu):

$\forall x \in M$, $\forall$ 曲線$\tau \in M$ $(\tau(0) = x)$, τ の展開曲線 τ^* が接空間 $T_x(\bar{M})$ 内の n 次元球面に属すること.

定理 (Reckziegel 1974)

M は $\bar{M}$ のコンパクトな部分多様体で $T\bar{M}|M$ が計量 g を持ち, η は $(TM)^{\perp}$ 上のゼロでないベクトル場で長さ一定とする。そのとき、g は $\bar{M}$ 全体にリーマン計量として拡張され、M は $\bar{M}$ 内で η を平均曲率ベクトル場平行とする全臍的部分多様体となる。

定理 (Reckziegel 1974)

M は $\bar{M}$ のコンパクトな部分多様体で $T\bar{M}|M$ が計量 g を持ち, η は $(TM)^{\perp}$ 上のゼロでないベクトル場で長さ一定とする。そのとき、g は $\bar{M}$ 全体にリーマン計量として拡張され、M は $\bar{M}$ 内で η を平均曲率ベクトル場平行とする全臍的部分多様体となる。

任意のコンパクトな部分多様体は外的球面であるように外側の計量をとることができると云っており、pmc であることは位相に制限をつけない、

リーマン多様体 (B, g_B), (F, g_F) と, $B \times F$ 上の正値関数 f に対し、

$$(B \times F, g), \quad g := g_B + f^2 g_F$$

を考え, $B \times_f F$ とかく. このとき、

定理 (Chen,1981)

(1) $\forall b \in B$, ファイバー $F_b = \{b\} \times F$ は $B \times_f F$ の全臍的部分多様体で $f^{-1}\nabla f$ が平均曲率ベクトル場、

(2) ファイバー F_b が $pmc \Longleftrightarrow f(b,p) = \lambda(b)\mu(p)$, $\lambda(b)$ は B の正値関数、$\mu(p)$ は F の正値関数.

リーマン多様体 (B, g_B), (F, g_F) と, $B \times F$ 上の正値関数 f に対し、

$$(B \times F, g), \quad g := g_B + f^2 g_F$$

を考え, $B \times_f F$ とかく. このとき、

定理 (Chen,1981)

(1) $\forall b \in B$, ファイバー $F_b = \{b\} \times F$ は $B \times_f F$ の全臍的部分多様体で $f^{-1}\nabla f$ が平均曲率ベクトル場、

(2) ファイバー F_b が *pmc* $\Longleftrightarrow f(b,p) = \lambda(b)\mu(p), \quad \lambda(b)$ は B の正値関数、$\mu(p)$ は F の正値関数.

外側の空間に条件がないと、全臍的部分多様体で平均曲率ベクトル場が平行な部分多様体はいくらでも存在する。

R-space

M. Takeuchi - S. Kobayashi: Minimal imbeddings of R-spaces, JDG, 1968

R-space

M. Takeuchi - S. Kobayashi: Minimal imbeddings of R-spaces, JDG, 1968

equivariantness, minimality in a sphere, minimum total curvature.

R-space

M. Takeuchi - S. Kobayashi: Minimal imbeddings of R-spaces, JDG, 1968
equivariantness, minimality in a sphere, minimum total curvature.

S. Kobayashi, Isometric imbeddings of compact symmetric spaces, TMJ, 1968

R-space

M. Takeuchi - S. Kobayashi: Minimal imbeddings of R-spaces, JDG, 1968
equivariantness, minimality in a sphere, minimum total curvature.

S. Kobayashi, Isometric imbeddings of compact symmetric spaces, TMJ, 1968
construction of those immersions

竹内　勝
小林昭七

Smyth(1973)

$\Psi = \{3 \times 3$ 実対称行列$\}, \quad \langle X, Y \rangle = TrXY$
$k \in R$、超平面 $\Psi_k := \{X \in \Psi \mid TrX = k\}$.

$SO(3)$ の Ψ_k への等長作用： 共役

$$X_k := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & k \end{pmatrix} \in \Psi_k$$

点 X_k でのイソトロピー部分群は、$k \neq \pm 1$ としたとき

$$K = \left\{ X \mid X = \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \pm 1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}, \ \det X = +1 \right\}$$

点 X_k を通る $SO(3)$ の軌道を M_k^3 とかく. そのとき、

定理 (Smyth, MA, 1973)

- M_k^3 は $\Psi_k(\cong E^5)$ の *pmc* 等質部分空間,
- $S^3 \cong SU(2) \Rightarrow SO(3)$ より、M_k^3 は S^3 から E^5 への *pmc* はめ込み,
- $M_k^3 \subset {}^{\exists}S^4$ であるが、極小的でない.

定理 (Olmos, JDG 1994)

(*a*) M : ユークリッド空間内の *pmc* コンパクト等質部分空間
$\Rightarrow$
M は球面内の極小部分空間、または 単純対称空間のイソトロピー表現の軌道.

(*b*) M: ユークリッド空間内の *pmc* 既約等質部分空間
$\Rightarrow$
M は極小部分多様体, 球面内の極小部分多様体, または単純対称空間のイソトロピー表現の軌道

対称空間のイソトロピー表現の軌道の幾何学的研究は多くなされている。例として、

- Kitagawa-Ohnita(MA, 1983):　R-空間のユークリッド空間への標準埋め込みは pmc.
- Y. Kitagawa, “Compact homogeneous submanifolds with parallel mean curvature”, Springer Lecture notes in Math. Vol. 1090(edited by Kenmotsu) (1984), 93-98　：余次元 3 の場合

Olmos の論文で Takeuchi-Kobayashi(1968), Kobayasgi(1968), Smyth(1973), Kitagawa-Ohnita(1983), Kitagawa(1984) は引用されていない

大仁田（大阪市立大）の解説

大仁田　様、 2016/09/20
１０月２日東京で平均曲率ベクトル平行曲面に関する講演を行う予定ですが、準備として高次元の場合を調べています。そこで、C.Olmos, Homogeneous submanifolds of higher rank and parallel mean curvature, JDG, 39(1994), 605-627 の定理 B によると、「ユークリッド空間内のコンパクト既約等質部分空間で平均曲率ベクトル平行なのは、超球面内の極小部分多様体か単純対称空間のイソトロピー表現の軌道である」とあります。質問は上の定理の逆が成立するか？、そして「単純対称空間のイソトロピー表現の軌道」の分類表はどこにありますか？　これらのことは専門家にとっては既知のことなので Olmos はなにも言ってないのですか？
剱持 勝衛

返事　　2016/09/20

・　剱持：　質問は上の定理の逆が成立するか？

大仁田：　はい、成立します。超球面内の極小部分多様体は、ユークリッド空間内で平均曲 率ベクトル場が平行は容易な計算で出ます。単純対称空間のイソトロピー表現の軌道は、R-空間（R-spaces）のことで、その平均曲率ベクトル場の平行性は、Y. Kitagawa and Y. Ohnita: On the mean curvature of R-spaces. Math. Ann. 262 (1983), 239-243.　で示しています。簡単な証明は、Y. Ohnita: The degrees of the standard imbeddings of R-spaces. Tohoku Math. J. 35 (1983), 499-502. も参照。

・　劔持　：　そして「単純対称空間のイソトロピー表現の軌道」の分類表はどこにありますか？

大仁田：　この論文で、Olmos が、「単純対称空間」と言っているのは、「既約リーマン対称空間」のことで、既約リーマン対称空間は Helgason の本に分類表がありますが、それぞれのイソト ロピー表現の軌道はいろいろな多くの研究者が研究していますが、具体的にすべて書き下すのは膨大 な作業で、誰かやって論文に、個々の既約リーマン対称空間についてイソトロピー表現の軌道 ”すべて ”具体的に分類した表があるわけではないようです。今までのところ （ルート系などに帰着させて）理論的方法で十分できるので、そこまでの必要性はないかなと思われます。

・劔持　：　これらのことは専門家にとっては既知のことなのでOlmos はなにも言ってない のですか？

大仁田：　そうですね。そういうことでしょうね。すべての各既約リーマン対称空間についてイソトロピー表現の軌道 ”すべて ”具体的に分類した表を作成するのも、巧みに上手な方法で完遂できれば、良い研究とは思います。　大仁田

続

大仁田　様、 2016/09/21
どうもありがとう。　２日の講演では、「大仁田さんから教えられた」として、メールの内容を紹介します。　もう二つ質問です。
(1)　それぞれのイソトロピー表現の軌道全体は約何個ですか？
(2) 関連する論文を探していたら、Springer Lecture notes in Math. vol.1090(1984), 93-98 に北川君の論文"Compact homogeneous submanifolds with parallel mean curvature" を見つけました。ここで、彼は「codim3 のイソトロピー表現の軌道」を全て求めたということですか？　剱持

大仁田さんの返事

（１）　劔持　：　それぞれのイソトロピー表現の軌道全体は約何個ですか？

大仁田：　各リーマン対称空間のイソトロピー表現のすべての軌道は非可算無限個です。それぞれのリーマン対称空間 G/K に対して、 G/K の階数を r とするとき、r 次元ベクトル空間（極大可換部分空間）の（r 次元）凸閉領域（ワイル領域）によって、イソトロピー表現の軌道全体（合同類）は、連続的にパラメータ付けされます。

(2) 剱持：　北川 "Compact homogeneous submanifolds with parallel mean curvature" で、彼は「codim3 のイソトロピー表現の軌道」を全て求めたということですか？

大仁田：　ちょっと違います。北川さんの論文は、私も覚えております。Hsiang-Lawson の論文より、codim 3 の軌道をもつ極大コンパクトリー群の表現が分類されており、北川さんが軌道が parallel mean curvature vector をもつものを各個撃破で調べたところ、リーマン対称空間のイソト ロピー表現の軌道になっているものだけであったという結果です。北川さんは、Olmos の当該の定理の主張を、「codim 3 の場合に」、各個撃破で調べて、Olmos より前（1984）に証明したことになります。この北川さんの結果は、Olmos の定理の主張を示唆するいい結果だったと感じています。

以上

Maeda-Udagawa, J.Geom.(2011): 実超曲面 $M^{2n-1} \subset CP^n, (n \geq 2)$ と極小はめ込み $f_1 : CP^n \longrightarrow S^N$ の合成により

定理 (S. Maeda, S. Udagawa 2011)

高次元球面に次の性質をもつ奇数次元部分多様体 M が存在する (1) M は pmc 等質部分多様体、(2) M は Berger 球面、(3) M は佐々木空間形.

M: Berger 球面 $\Leftrightarrow$ Odd dim. compact simply connected M s.t. sect.curvatures $\subset [\delta K, K]$ for some $\delta \in (0, 1/9), K > 0$.

Characterization of pmc submanifolds

ユークリッド空間または球面内のコンパクト pmc 部分多様体の中で全測地的または全臍的部分多様体を特徴付ける結果は多く知られている。
例　M. Okumura, AJM, 1974, K. Shiohama and H. W. Xu, Nagoya M. J. 1998,...

定理 (H.W. Xu, J.R. Gu, Commun. A.G. 2007)

$M^n \subset E^{n+p}$ 完備 pmc s.t.

$$\int_{M^n} (S - n|H|^2)^{n/2} dM < {}^{\exists}C(n)$$

then $S \equiv n|H|^2$, i.e., M^n is totally umbilic.
If $H=0$, then $M^n = R^n$; If $H \neq 0$, then $M^n = S^n(1/|H|)$.

第一部の要約

平均曲率ベクトル平行曲面 (pmc) 部分多様体について、

- 外側空間 (ambient space) が一般なとき、pmc 性は強い条件とはならない。
- 変分法的特徴付け：　調和写像、　調和形式
- ユークリッド空間、球面には多くの非自明な pmc 等質部分多様体（３次元以上）が存在する。

第一部　終